CONCOURS 1983

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, n désigne un entier fixé, supérieur ou égal à 2 ; E est l'ensemble des éléments $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient la relation

$$-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1 .$$

Pour X appartenant à E, on note $f(x_1, \ldots, x_n)$, ou $f(X)$ en abrégé, la quantité $(1 - x_1^2)^{3/4} \ldots (1 - x_n^2)^{3/4} V(x_1, \ldots, x_n)$, où $V(x_1, \ldots, x_n)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1° *a.* Démontrer que $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (x_q - x_p)$, prouver que f est bornée sur E et déterminer $\mathrm{Inf}(\{f(X) \mid X \in E\})$; on notera M la borne supérieure de f sur E.

b. Montrer que f admet, en tout point de E, des dérivées partielles, et que celles-ci sont continues sur E ; trouver une expression simple de

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

pour $p = 1, \ldots, n$.

2° *a.* Si X et Y appartiennent à E, vérifier que $Z = \frac{X + Y}{2}$ y appartient aussi et établir que

$$(f(Z))^2 \geqslant f(X) f(Y)$$

Quelle est la condition, nécessaire et suffisante, portant sur X et Y, pour que l'inégalité ci-dessus soit une égalité?

b. On admet, sans qu'il soit demandé de le démontrer, qu'il existe au moins un point $A = (a_1, \ldots, a_n)$ appartenant à E, tel que $f(A) = M$.
Prouver qu'alors A est unique et qu'on a, pour $p = 1, \ldots, n$, l'égalité

$$a_{n-p+1} = -a_p .$$

3° *a.* On note $P(t)$ le polynôme $(t - a_1) \ldots (t - a_n)$. Exprimer $f(A)$ en fonction de $P(-1)$, $P(1)$, $P'(a_1)$, ..., $P'(a_n)$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

b. Établir que, pour $k = 1, \ldots, n$, fixé, on a

$$\left(\sum_{p \neq k} \frac{1}{a_k - a_p} \right) - \frac{3 a_k}{2 (1 - a_k^2)} = 0$$

4° A l'aide de la question 3°, montrer que $\frac{P''(a_k)}{P'(a_k)} - \frac{3 a_k}{1 - a_k^2}$ est nul pour $k = 1, \ldots, n$ et en déduire qu'il existe un nombre réel s tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait

$$(1 - t^2) P''(t) - 3 t P'(t) + s P(t) = 0 .$$

Combien vaut s?

5° Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $L(\lambda)$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y'' - 3 x y' + \lambda y = 0 .$$

a. Vérifier que $L(\lambda)$ admet une solution polynomiale de degré n si, et seulement si, λ est égal à s.

b. Le fait d'être unitaire, c'est-à-dire de coefficient directeur égal à 1, et solution de $L(s)$ caractérise-t-il le polynôme P de la question 3°?

E.S.I.M.
1983
135

6° Soit $Q(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left((1-t^2)^{n+\frac{1}{2}}\right)^{(n)}$, où (n) désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$.

Prouver que P est proportionnel à Q.

7° *a.* Établir qu'il existe un unique polynôme R tel que, pour tout $\theta \notin \pi\,\mathbb{Z}$, on ait

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = R(\cos\theta).$$

b. Démontrer que P est de la forme μR, pour un $\mu \in \mathbb{R}$, et calculer μ.

8° Déduire des questions précédentes la valeur du point $A = (a_1, \ldots, a_n)$ où la fonction f atteint son maximum M sur E.

La question suivante a pour objectif le calcul de M.

9° *a.* Calculer $R'(\cos\theta)$ pour $0 < \theta < \pi$, en déduire la valeur de $R'(a_k)$ pour $k = 1, \ldots, n$ en fonction de a_k seulement.

b. A l'aide de a et des questions 3°, 7°, trouver la valeur de M.

10° Pour tous réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$, on pose :

$$D(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sqrt{|\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_n|}\begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \ldots & \sin n\theta_1 \\ & & & \\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \ldots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}.$$

Quelle est la valeur maximum de la fonction D?

FIN